دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی
علیرضا سلمانی انباردان
کارشناس ارشد ریاضی مالی، دبیر ریاضی شهرستان قدس

(قسمت هفتم)

آزمایشگاه ریاضی

مقدمه

بحث حد و پیوستگی از جمله مباحث پایه‌ای در حسابان است. در این قسمت چند فعالیت در رابطه با معرفی حد توابع مطابق با مطالب مطرح شـــده در کتاب درسی با استفاده از جئوجبرا ارائه می‌شـــود. این فعالیت‌ها مربوط به فرایندهای حدی، حد چپ و راست، حد تابع در یک نقطه و پیوستگی هستند.

فعالیت ۱. فرایندهای حدی

می‌دانیم تابع f در x=a دارای حدی چون l اســـت و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$. اگر و فقط اگر حد چپ و حد راســـت تابع f در x=a وجود داشته و هر دو برابر l باشند، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=l$$

الف. فرض کنید: $f(x)=\sqrt{x}$. مطلوب است: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. آیا تابع f در x=۰ حد دارد؟

در نمودار ۱، منحنی این تابع در صفحهٔ مختصات رسم شده است که برای رسم نمودار این تابع کافی است در قسمت ...Input دستور زیر را وارد کنیم:

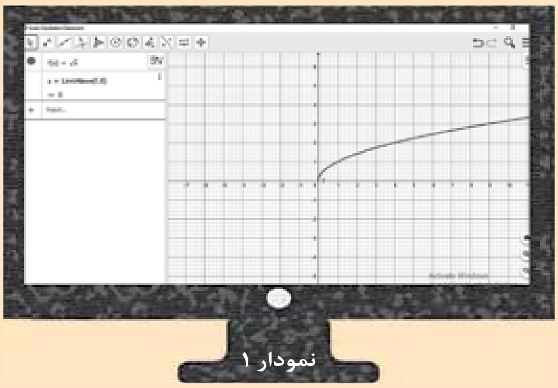
f(x)=sqrt(x)

نحوهٔ محاسبهٔ حدود فوق در جئوجبرا به‌صورت زیر است:

برای پیدا کردن حد راست تابع f در نقطهٔ صفر، دستور زیر را در قسمت ...Input وارد می‌کنیم:

LimitAbove(f(x),۰)

بعد از وارد کردن این دســـتور، مقدار حد راســـت برابر صفر مشـــخص می‌شود. ضمناً با توجه به نمودار این تابع و اینکه دامنهٔ تابع به‌صورت $[0,+\infty)$ است، حد چپ تابع در x=۰ وجود ندارد و لذا این تابع در x=۰ دارای حد نیست.



نمودار ۱

ب. تابع g با ضابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$g(x)=\begin{cases} -x+2 & x>2 \\ -2 & x=2 \\ x-3 & x<2 \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم کنید و حد چپ و حد راست آن را در x=۲ بیابید. آیا این تابع در این نقطه دارای حد است؟

ابتدا با اســـتفاده از دستور شـــرطی که قبلاً توضیح داده شده است، تابع را رسم می‌کنیم (نمودار ۲):

g(x)=if(x>۲,-x+۲,x<۲,x-۳)

A=(۲,-۲)

برای مشخص شدن حد راست از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

LimitAbove(g(x),۰)

نمودار ۲

بعد از وارد کردن عبارت فوق مقدار صفر نمایش داده می‌شود.
اکنون برای مشخص شدن حد چپ دستور زیر را وارد می‌کنیم:

LimitBelow(g(x),۰)

بعد از وارد کردن عبارت فوق مقدار ۱- نمایش داده می‌شود، مشاهده می‌کنیم که این دو مقدار برابر نیستند پس این تابع در نقطهٔ x=۲ حد ندارد.

ج. تابع h با ضابطهٔ $h(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$ مفروض است. نمودار این تابع را رسم و بررسی کنید آیا این تابع در x=۳ حد دارد؟

همانند دو مثال قبل ابتدا تابع را با استفاده از دستور زیر رسم می‌کنیم:

h(x)=Abs(x-۳) / x-۳

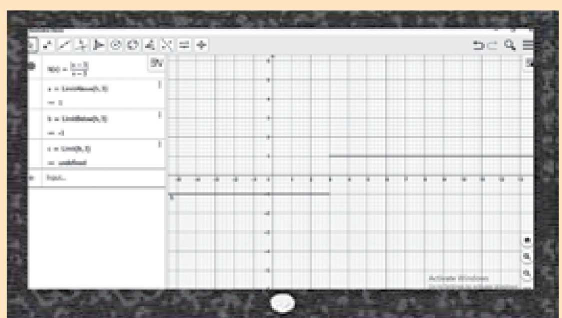
برای مشخص شدن حد راست از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

LimitAbove(h(x),۳)

بعد از وارد کردن عبارت فوق مقدار ۱ نمایش داده می‌شود، اکنون برای مشخص شدن حد چپ دستور زیر را وارد می‌کنیم:

LimitBlow(h(x),۳)

بعد از وارد کردن عبارت فوق مقدار ۱- نمایش داده می‌شود. پس تابع h در نقطهٔ x=۳ حد ندارد و اگر عبارت Limit(h(x),۳) را وارد کنیم، عبارت undefined نمایش داده خواهد شد که به معنی «تعریف نشده» است.



نمودار ۳

د. مقادیر $\lim_{x\to 2^+}[x]$ و $\lim_{x\to 2^-}[x]$ را به دست آورید. آیا این تابع در x=۲ حد دارد؟ در $x=\frac{1}{2}$ چطور؟

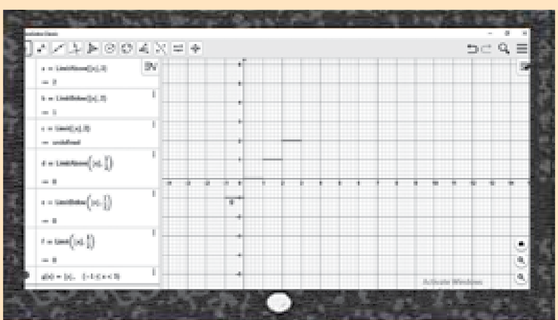
نمودار ۴ تابع جزء صحیح x را در بازهٔ [-۱,۳] نمایش می‌دهد.

به منظور رسم تابع جزء صحیح در بازهٔ داده شده از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

If(-۱<=x<۳,floor(x))

برای مشخص کردن حد راست تابع جزء صحیح x در نقطهٔ x=۲، دستور LimitAbove(floor(x),۲) را وارد می‌کنیم که پاسخ آن ۲ خواهد شد. همچنین برای مشخص کردن حد راست تابع جزء صحیح x در نقطهٔ x=۲، دستور LimitBelow(floor(x),۲) را وارد می‌کنیم که پاسخ آن ۱ خواهد شد پس نتیجه می‌شود که این تابع حد ندارد و اگر دستور Limit(floor(x),۲) را وارد کنیم، عبارت undefiend نمایش داده می‌شود.

برای مشخص شدن حد راست تابع جزء صحیح x در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$، دستور LimitAbove(floor(x),1/۲) را وارد می‌کنیم که با اجرای آن پاسخ صفر مشخص می‌شود. همچنین برای مشخص شدن حد راست تابع جزء صحیح x در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$، دستور LimitBelow(floor(x),1/۲) را وارد می‌کنیم که پاسخ آن نیز صفر خواهد شد. پس نتیجه می‌شود که این تابع حد دارد و اگر دستور Limit(floor(x),۱/۲) را وارد کنیم، مقدار صفر نمایش داده می‌شود.



نمودار ۴

فعالیت ۲. حدود یکطرفه

حاصل هریک از حدود یکطرفهٔ زیر را در صورت وجود به دست آورید:

a) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \cos x$

b) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}^-} \sin x$

c) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{[x]}$

d) $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{2x-6}$

برای محاسبه هریک از حدهای قبل به ترتیب دستورهای زیر را وارد می‌کنیم:

a=LimitAbove(cos(x),pi/۴)

b=LimitBelow(sin(x),-pi/۳)

c-LimitAbove(x/floor(x),۲)

d=LimitAbove(sqrt(۲x-۶),۳)

که به ترتیب پاسخ‌های زیر با اجرای هریک از این دستورها نمایش داده می‌شوند:

a=۰/۷۱ , b=-۰/87 , c=۱ , d=۰

فعالیت ۳. محاسبهٔ حدود ....

حد هریک از توابع زیر را در نقطه‌های داده شده به دست آورید:

$$a)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} \qquad b)\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{x^2-4x+1}$$

$$c)\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2} \qquad d)\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x.\cos x}{1+\cos^2 x}$$

$$e)\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$$

برای محاسبهٔ هریک از حدهای بالا به ترتیب دستورهای زیر را وارد می‌کنیم:

a=Limit((x^۳-۱)/(x-۱),۱)

b=Limit((۲x-۱)/(x^۲-۴x+۱),۳)

c=Limit((x^۳+۸)/(x+۲),-۲)

d=Limit((sin(x)cos(x))/(۱+cos^۲(x)),pi)

e=Limit((۱-sin^۲(x))/(۱-sin(x)),pi/۲)

که به ترتیب پاسخ‌های نمایش داده شده در زیر هر عبارت به‌صورت زیر است:

a=۳ , b=-۲/۵ c=۱۲ , d=۰ , e=۲

فعالیت ۴. پیوستگی ....

تابع f را در نقطهٔ x=a پیوسته نامیم هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)$ و f(a) هر دو موجود و با یکدیگر برابر باشند. همچنین در صورتی که: $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$، تابع f را در نقطهٔ x=a پیوستهٔ راست می‌نامیم، و هرگاه: $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$، تابع f را در نقطهٔ x=a پیوستهٔ چپ می‌نامیم.

الف. پیوستگی تابع f با ضابطهٔ زیر را در نقطهٔ x=۰ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & x\le 0\\ x^2+2 & x>0\end{cases}$$

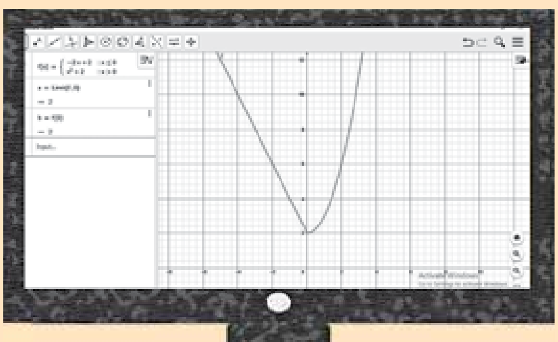
شکل این تابع در نمودار ۵ رسم شده است. برای رسم تابع f دستور زیر را وارد می‌کنیم:

f(x)=if(x<=۰,-۲x+۲,x>۰,x^۲+۲)

برای محاسبهٔ حد تابع f(x) در نقطهٔ x=۰ از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

Limit(f(x),۰)

که مقدار ۲ نمایش داده می‌شود. برای محاسبهٔ مقدار تابع f در x=۰، از دستور f(۰) استفاده می‌کنیم که مقدار ۲ نمایش داده می‌شود. چون مقدار تابع و حد تابع در x=۰ برابر است، پس تابع f در نقطهٔ x=۰ پیوسته است.



نمودار ۵

ب. فرض کنید: $f(x)=[x]$. تحقیق کنید تابع f در نقطهٔ x=۱ پیوستهٔ چپ است یا راست؟ در $x=\frac{3}{2}$ چطور؟ ابتدا دستور زیر را وارد می‌کنیم:

f(x)=floor(x)

حالا مقدار تابع در نقطهٔ x=۱ را با دستور a=f(۱) به دست می‌آوریم. سپس حد راست و چپ تابع f(x) در نقطهٔ x=۱ را با استفاده از دستورهای زیر به دست می‌آوریم:

b=LimitAbove(f(x),۱)

c=LimitBelow(f(x),۱)

مشاهده می‌کنیم که حد راست برابر ۱ و حد چپ تعریف نشده اعلام می‌شود. لذا تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ پیوستهٔ راست است.

برای نقطهٔ $x=\frac{۳}{۲}$ تمام مراحل بالا را تکرار می‌کنیم:

e=f(۳/۲)

g=LimitAbove(f(x),۳/۲)

h=LimitBelow(f(x),۳/۲)

که هر سه مقدار برابر ۱ است. پس تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ در نقطهٔ $x=\frac{۳}{۲}$ هم پیوستهٔ راست و هم پیوستهٔ چپ است، یعنی در این نقطه پیوستگی دارد.

ج. تابع f با ضابطهٔ زیر مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases}۲x+۴ & x<-۱\\ x^{۲}-۱ & -۱\le x<۲\\ -x+۵ & ۲<x<۵\end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم کنید و تحقیق کنید این تابع در کدام بازه‌های زیر پیوسته است؟

$[-۱,۱]$ $\qquad$ $[-۲,۰]$

می‌دانیم تابع f در [a,b] پیوسته است، هرگاه f در بازهٔ باز (a,b) پیوسته، در x=a پیوستهٔ راست و در x=b پیوستهٔ چپ باشد.

با استفاده از دستور زیر تابع f را رسم می‌کنیم:

f(x)=if(x<-۱,۲x+۴,if(-۱<=x<۲,x^۲-۱,۲<x<۵,-x+۵))

با مشاهدهٔ نمودار ۶ متوجه خواهیم شد که تابع f در بازهٔ (-۲,۰) پیوسته نیست. پس به بررسی پیوستگی در ابتدا و انتهای بازهٔ [-۲,۰] نیازی نیست. اما در بازهٔ (-۱,۱) نمودار تابع پیوسته است. حالا به بررسی پیوستگی راست در ابتدای بازه و پیوستگی چپ در نقطهٔ انتهای بازه می‌پردازیم. برای این کار از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

مقدار تابع f در نقطهٔ x=-۱ a=f(-۱)

مقدار تابع f در نقطهٔ x=۱ b=f(۱)

حد راست تابع f در نقطهٔ x=-۱

c=LimitAbove(f(x),-۱)

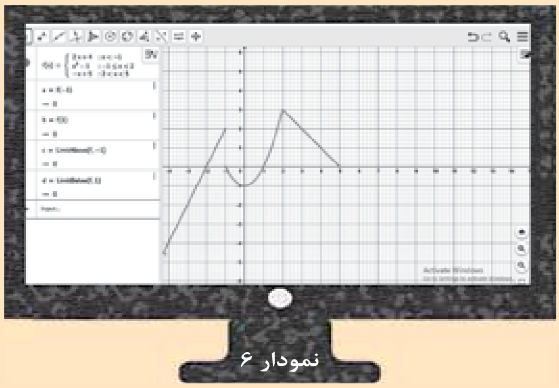
حد چپ تابع f در نقطهٔ x=۱

d=LimitBelow(f(x),۱)

با ورود دستورهای بالا مقادیر زیر به دست خواهند آمد:

a=۰ , b=۰ , c=۰ & d=۰

مشاهده می‌شود که مقدار a با c و مقدار b با d برابر است. پس تابع f در بازهٔ [-۱,۱] است.

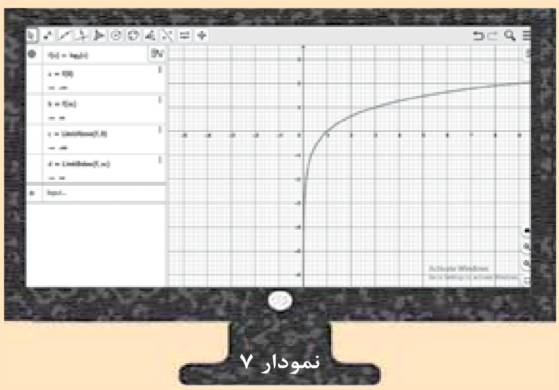


نمودار ۶

د. با توجه به نمودارهای تابع‌های $y=\log_{۳}(x)$ و y=cosx، این تابع‌ها در چه بازه‌ای پیوسته هستند؟ (بزرگ‌ترین بازه را مشخص کنید.)

برای نمایش تابع $y=\log_{۳}(x)$ دستور زیر را وارد می‌کنیم:

f(x)=log(۳,x)



نمودار ۷

با توجه به نمودار ۷ تابع پیوستگی در بازهٔ (۰,∞) را بررسی می‌کنیم:

نکته: برای درج علامت بی‌نهایت در جئوجبرا از صفحه کلید برنامه استفاده کنید که در تصویر ۱ نمایش داده شده است.

تصویر ۱

بـــرای پیدا کردن مقدار تابع در نقطه‌های ابتدا و انتهای بازه از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

$a=f(0)$

$b=f(\infty)$

سـپس بـرای مشـخص شـدن حـد راسـت در نقطـهٔ ابتدایی و حـد چـپ در نقطـهٔ انتهایـی، از دسـتورهای زیـر اسـتفاده می کنیـم:

c=LimitAbove(f(x),0)

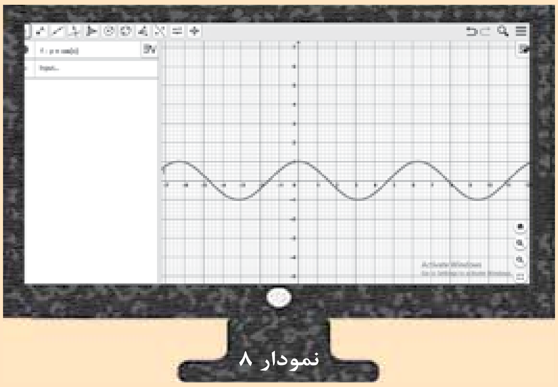
d=LimitBelow(f(x),∞)

می‌بینیم که مقدار تابع و حد راســـت تابع در نقطهٔ $x=0$ برابر $-\infty$ و همچنین مقدار تابع و حد چپ تابع در $x=\infty$ برابر ∞ هستند.

برای نمایش تابع $y=\cos x$ دستور زیر را وارد می‌کنیم:

$f(x)=\cos(x)$

با توجه به نمودار ۸، تابع کسینوس در تمام نقطه‌های دامنه‌اش پیوسته است که می‌توان بیان کرد: تابع کسینوس در بازهٔ $(-\infty,\infty)$ پیوسته است.



نمودار ۸

منابع

۱. کتاب درسی ریاضی ۲ دورهٔ دوم متوسطهٔ علوم تجربی، ۱۳۹۸.
2. www.geogebra.org

ادب ریاضی

دانـــش ریاضیات همانند هر دانش دیگری در خدمت انســـان اســـت. آنچه در ریاضیات می‌خوانیم، «بازی با علامت‌ها و شکل‌ها» نیست. بلکه قانون‌هایی است که بر طبیعت و زندگی عملی ما حکومت می‌کند.

کار ریاضیات، وضع قانون‌های «من‌درآوردی» نیست؛ ریاضیات قانون‌های موجود و حاکم بر طبیعت و جامعه را کشف می‌کند. رابطه‌ها و شکل‌هایی که در ریاضیات، با آن‌ها سروکار داریم، دستگیره‌هایی هستند که به یاری آن‌ها می‌توان نیازهای عملی دانش‌های دیگر و به‌طور کلی، نیازهای فکری انسان را برآورده کرد.

***

هرگز کلی‌گویی نکنید. دانش با شـــعار دادن، سازگار نیست. جمله‌های مبهم و نامفهوم ـ هرچند به ظاهر بتوانند حقیقتی را بیان کند چیزی را به شـــنونده نمی‌دهد. کســـی که اهل دانش است، باید حرف‌های خود را، مشـــخص و بدون هیچ ابهامی عرضه کند.

شادروان پرویز شهریاری

چهرهٔ ماندگار آموزش ریاضی کشور